

1. Introdução

Na Constância Investimentos adotamos uma construção sistemática de portfólios baseada em indicadores e fatores de risco, ver o artigo “*Investindo em Ações via Fatores de Risco*”¹.

Durante muito tempo adotamos o critério calendário onde o rebalanceamento dos nossos fundos eram feitos no último dia útil de cada mês, uma prática corriqueira no mercado que gera um razoável equilíbrio entre custos de transação e defasagem dos portfólios dos nossos fundos versus as exposições sugeridas pelo nosso modelo, que se alteram lentamente mas diariamente.

Porém, não havia um racional econômico ou financeiro que nos indicasse se era preferível fazer o rebalanceamento com frequência maior ou menor do que mensalmente, total ou parcial. Um rebalanceamento mais racional deveria aumentar a frequência em momentos de mercados mais voláteis e possivelmente quando empresas estão reportando resultados que diferem significativamente das projeções dos analistas. Em ambas as situações, as exposições sugeridas pelo nosso modelo potencialmente se alterariam mais significativamente e mais rapidamente, justificando pagar custos de transação com maior frequência.

Em estratégias sistemáticas como as adotadas na Constância Investimentos, onde uma parcela significativa do portfólio pode ter liquidez baixa, o custo de transação envolve não só corretagens e emolumentos, mas também “Impacto de Mercado”, isto é, o quanto o preço do ativo se modificaria se a transação fosse efetuada. Ver nosso artigo “*Impacto de Mercado e Escalabilidade de Estratégia Sistemática*”².

Neste artigo explicamos e adaptamos a teoria de rebalanceamento ótimo de portfólios com custos de transação para desenvolver e implementar uma estratégia racional de realocação dos nossos fundos. Como resultado temos um portfólio com expectativa de *turnover* bem menor e melhor performance no back-test após os custos de transação. Isso aumenta significativamente o *capacity* da nossa estratégia sistemática aplicada ao mercado de renda variável no Brasil.

¹ <https://constanciainvest.com.br/publicacoes/>

² mesmo link acima

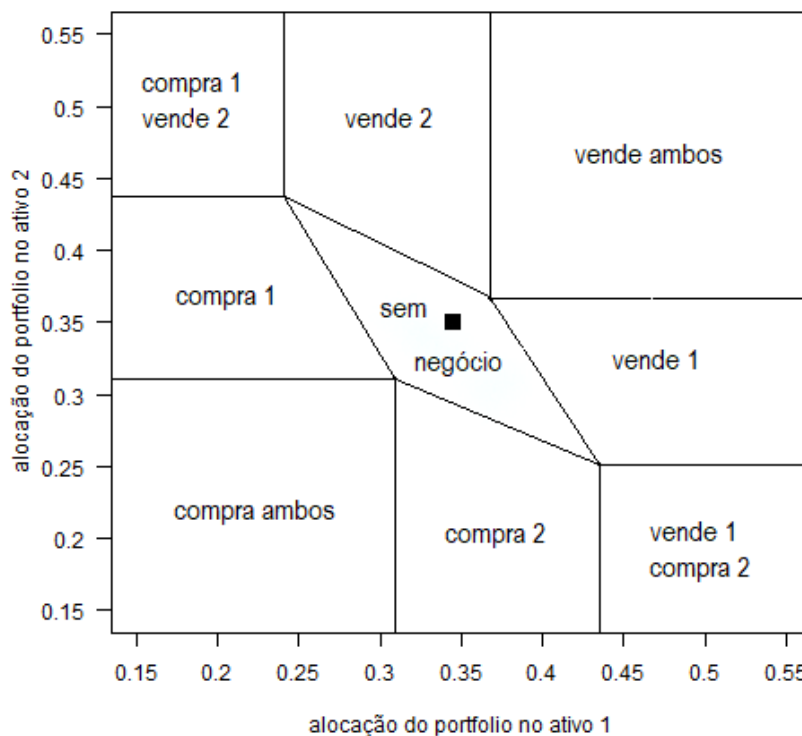
2. Teoria de Rebalanceamento Ótimo de Portfólios

A questão de rebalanceamento ótimo de portfólios é bastante complexa e já foi objeto de estudos em vários trabalhos acadêmicos e aplicados, ver por exemplo as referências [3], [4] e [5]. Todos estes trabalhos apontam que, por causa da existência de custos de transação, a estratégia normalmente adotada de rebalancear totalmente em direção ao portfólio ideal nunca é um procedimento ótimo. Quando equilibrarmos custos de transação e potencial melhora do perfil do portfólio, em geral um rebalanceamento apenas parcial é mais adequado.

Na verdade, estes trabalhos provam que existe uma região de “não negociação” em volta do portfólio ótimo. Isto quer dizer, se o portfólio pré-rebalanceamento estiver suficientemente perto do portfólio ideal, nenhum nível de rebalanceamento compensaria e a estratégia ótima seria não fazer nada.

Quando existem apenas custos proporcionais (corretagem, emolumentos, etc.), a teoria demonstra que a estratégia ótima é rebalancear até a fronteira da região de “não negociação”. Custos fixos (custo de registro, etc.) ou mistos induzem um rebalanceamento até ao interior dessa região.

O gráfico abaixo exemplifica, para um portfólio de apenas 2 ativos, o rebalanceamento racional em direção ao ponto central:



3. Impacto de Mercado como Custo de Transação.

O modelo mais usual de impacto de mercado é o “modelo raiz-quadrada” do BARRA (ver referência [1]). Uma ordem de tamanho Q , para uma ação que tem volume diário V e volatilidade diária σ , tem o impacto percentual de preço $\Delta(Q)$ dado pela fórmula $\Delta(Q) = \alpha \left(\frac{Q}{V}\right)^\delta \sigma$, onde α e δ são constantes estimadas por regressão. Vários trabalhos econométricos (ver referências [1] e [2]) utilizando base de dados de centenas de milhares ou mesmo milhões de trades no mercado acionário dos E.U.A. estimaram $\alpha \cong 1$ e $\delta \cong 1/2$.

O custo percentual de transação devido ao impacto de mercado está relacionado ao preço médio de execução, que supomos sofrer metade do impacto acima, isto é, $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{Q}{V}} \sigma$. Portanto, o custo final de transação é o tamanho da ordem multiplicado por esse custo percentual $= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Q}{V}} Q \sigma$. Vemos que o custo de transação cresce a ordem superior a linear, com o expoente $3/2$. Portanto, pode ser muito superior aos típicos custos proporcionais de corretagem e emolumentos, especialmente em ações ilíquidas onde o volume médio diário V é baixo.

Em um trabalho econométrico recente (ver [9]) e que dispõe de um dos maiores bancos de dados com 5 milhões de trades, os autores concluem que o modelo raiz quadrada pode ser excessivamente conservador para trades grandes (até perto de 1 volume diário), e uma forma funcional com δ substancialmente menor que $1/2$ ou mesmo como logarítmica pode ser mais adequada.

Conforme mencionamos, a literatura indica uma região de “não negociação” em volta do portfólio alvo. Custos de transações lineares sugerem um rebalanceamento parcial até a fronteira dessa região, enquanto custos fixos ao interior dela. É possível demonstrar que com os custos de transação devido ao Impacto de mercado (da ordem de $3/2$), essa fronteira nunca será atingida. Porém, se a atratividade dos ativos (retorno esperado e volatilidades) se mantiver inalterada, então pode-se demonstrar que sucessivos rebalanceamentos ótimos farão as exposições assintoticamente se aproximarem dessa fronteira.

4. Implementação, *Backtest* e *Capacity* da Estratégia *Long-Only*

Para cada ação i denotamos por s_t^i o score gerado pelo nosso modelo multifatorial. O valor dos scores seriam as exposições caso ignorássemos o importante custo de transação associado ao impacto de mercado, e seus resultados de *back-test* estão reportados na primeira coluna numérica “modelo original” na tabela abaixo.

Este custo de transação relacionado ao impacto de mercado tende a ser proibitivo para ações menos líquidas quando o AUM da estratégia é alto. Por isso, em artigo anterior³, desenvolvemos um metodologia onde ajustamos a exposição sugerida pelo score s_t^i , limitando o número máximo de volumes diários permitido a qualquer ação, e redirecionando o excedente dessas exposições para as ações mais líquidas. Denotamos essas exposições ajustadas sugeridas pelo nosso modelo sistemático por $\alpha_t^{target,i}$. Os resultados de *back-test* dessas exposições estão reportados na segunda coluna numérica da tabela abaixo.

Seja α_t^i a exposição efetivamente implementada. No rebalanceamento mensal, que utilizamos durante alguns anos e seguia critério puramente calendário, implementávamos $\alpha_t^i = \alpha_t^{target,i}$, ou seja rebalanceamento total.

O rebalanceamento racional do portfólio *long-only* permite rebalanceamentos parciais e envolve otimizações numéricas onde maximizamos o acréscimo do retorno esperado após o rebalanceamento, subtraído dos custos proporcionais (corretagem + emolumentos, que supomos ser 15bps) e dos custos de impacto de mercado. A otimização calcula o percentual que cada ação deve ser rebalanceada em direção a $\alpha_t^{target,i}$, que pode ser zero, 100% ou um percentual intermediário. É importante notar que no rebalanceamento racional a alocação sugerida pelo nosso modelo sistemático passa a ser um “alvo móvel” que nunca será atingida.

Refazemos essa otimização para cada final de mês ao longo do histórico do nosso back-teste, de início de Agosto de 2004 até final de Março de 2020. Comparamos os retornos esperados na tabela abaixo para o portfólio sistemático *long-only*.

³ “Impacto de Mercado e Escalabilidade de Estratégia Sistemática.

<https://constanciainvest.com.br/publicacoes/>

Como referência o retorno médio anual do Ibovespa nesse período foi de 7.9%.

AUM (R\$ bi)		Modelo <u>Original</u>	Rebalanceamento Calendario	
			com Exposições Ajustadas <u>por Impacto de Mercado</u>	Rebalance <u>Otimizado</u>
1	Retono Bruto	25.6%	24.3%	21.5%
	Custos de Transação	10.2%	5.7%	2.2%
	Retono Líquido	15.4%	18.6%	19.3%
3	Retono Bruto	25.6%	22.7%	19.7%
	Custos de Transação	17.6%	8.4%	3.1%
	Retono Líquido	8.0%	14.3%	16.6%
5	Retono Bruto	25.6%	21.2%	18.5%
	Custos de Transação	22.0%	11.4%	3.6%
	Retono Líquido	3.6%	9.8%	14.9%
10	Retono Bruto	25.6%	19.8%	16.6%
	Custos de Transação	32.2%	17.8%	4.6%
	Retono Líquido	-6.6%	2.0%	12.0%

Na tabela acima, aumentamos progressivamente o valor total dos ativos sob gestão (AUM) da estratégia de R\$ 1bi até R\$ 10bi. O retorno médio bruto histórico de *backtest* do nosso modelo original é de 25.6% ao ano no período analisado, independente do AUM . Comparado com o retorno do Ibovespa de 7.9% a.a, isso dá uma boa medida da dimensão do valor adicionado pelo nosso modelo sistemático multifatorial. Porém, como uma parcela significativa das alocações geradas pelo modelo são Mid Caps e Small Caps, o custo de transação estimado para um AUM de R\$ 1bi já é bem alto em 10.2%. A maior parte deste custo vem do impacto de mercado.

Conforme mencionamos, precisamente por causa desse alto custo de impacto de mercado, desenvolvemos em trabalho anterior uma metodologia baseada na teoria de impacto de mercado, onde impomos racionalmente um limite máximo no número de volumes diários para a exposição de qualquer ação. Os excedentes das exposições limitadas são redirecionadas para outras ações mais líquidas e com score alto.

Os resultados de *back-test* obtidos quando empregamos esta metodologia que limita as exposições ilíquidas mas procede com 100% de rebalanceamento no último dia útil de cada mês estão na segunda coluna da tabela. Para o AUM de R\$ 1bi, essa imposição de número máximo de volumes diários para ações ilíquidas e realocação de exposições para ações mais líquidas, reduz o retorno bruto da estratégia de 25.6% ao ano para 24.3%. Porém, a redução dos custos de transação por causa da maior contração em ações mais líquidas é mais significativa, de 10.2% para 5.7%. Portanto, o retorno líquido médio da estratégia ao longo do período do *back-test* melhora levemente de 15.4% a.a. para 18.6% a.a.

Quando consideramos o rebalanceamento racional ao invés do calendário, o retorno esperado bruto da estratégia mais uma vez sofre uma pequena deterioração de 24.3% a.a. para 21.5% a.a.. Porém, ao otimizarmos a compra e venda de ações levando em consideração os custos, principalmente o impacto de mercado, o *turnover* da estratégia é reduzido a menos da metade, assim como os custos e transação que se reduzem de 5.7% para 2.2%. Mais um vez isso, vemos que o retorno líquido médio anualizado melhora levemente de 18.6% para 19,3%,

A tabela mostra que, conforme aumentamos o AUM da estratégia, é progressivamente mais importante limitarmos a exposição das ações menos líquidas ou otimizarmos o rebalanceamento levando em consideração os custos de transação. Com AUM = R\$ 3bi, o retorno líquido médio do modelo original de 8.0% a.a. seria virtualmente igual ao retorno anualizado de 7.9% do Ibovespa no período, mas o rebalanceamento que observasse nossa metodologia de impor um número máximo de volumes diários nas ações ilíquidas e redirecionasse as exposições para as ações mais líquidas tem um retorno líquido médio anualizado de 14.3%. Uma otimização elevaria esse valor para 16.6% a.a.

Conforme aumentamos o AUM, o método de otimização do rebalanceamento progressivamente concentra as compras e vendas nas ações mais líquidas, que sofrem menos impacto de mercado, mas que ainda são atraentes por terem score alto no nosso modelo multifatorial. Isso permite que nosso modelo de fatores continue gerando no *backtest* retornos médios líquidos significativamente acima do Ibovespa para valores de AUM bem elevados: retorno de 14.9% a.a para AUM = R\$ 5bi e 12.0% para AUM = R\$ 10bi.

5. Referências.

[1] N. Torre, "Barra market impact model handbook," BARRA Inc., Berkeley, 1997.

[2] Elia Zarinelli, Michele Treccani, J. Doyne Farmer, and Fabrizio Lillo, "Beyond the Square Root: Evidence for Logarithmic Dependence of Market Impact on Size and Participation Rate" *Quantitative Finance*, Dec 2014.

[3] Donohue, Christopher, and Kenneth Yip, 2003, Optimal Portfolio Rebalancing with Transaction Costs: Improving on Calendar- or Volatility-Based Strategies, *Journal of Portfolio Management* 29, 49-63.

[4] Holden Helge, and Holden Lars, Optimal Rebalancing of Portfolios with Transaction Costs. *Stochastics An International Journal of Probability and Stochastic Processes* · January 2012

[5] Dybvig, Philip H. and Pezzo, Luca, Mean-Variance Portfolio Rebalancing with Transaction Costs (March 14, 2019). Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=3373329> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3373329>

Disclaimers

Constância Investimentos only distributes investment funds managed by Constância. The information contained in this material is for informational purposes only, should not be considered as an offer to acquire shares of investment funds and does not constitute a prospectus provided in CVM Instruction 555 or ANBIMA's Self-Regulation Code.

This material is for informational purposes only and no information presented herein should be construed as an investment recommendation. Careful reading of prospectuses, supplementary information forms, key information sheets, and investment fund regulations by the investor before investing in your funds is recommended.

Past performance does not guarantee future profitability. Our investment funds are not guaranteed by the administrator, the fund manager, the portfolio manager, any insurance mechanism or the FGC.

A Constância Investimentos distribui **somente cotas** de fundos de investimentos **geridos por ela**. As informações contidas neste material são de caráter exclusivamente **informativo**, não devem ser consideradas uma oferta para aquisição de cotas de fundos de investimento e não constitui prospecto previsto na instrução **CVM 555** ou no **Código de Auto-Regulação** da ANBIMA.

Este material é de caráter **meramente informativo** e nenhuma informação aqui apresentada deve ser interpretada como uma recomendação de investimento. É recomendada a **leitura cuidadosa** dos prospectos, formulários de informações complementares, lâminas de informações essenciais e regulamentos dos fundos de investimentos pelo investidor antes de investir seus recursos.

A rentabilidade obtida no passado não representa garantia de rentabilidade futura. **Nossos fundos de investimento não contam com garantia do administrador do fundo, do gestor da carteira, de qualquer mecanismo de seguro ou, ainda, do Fundo Garantidor de Créditos – FGC.**